Наша цель:
У линейных операторов было разложение по базису. А есть ли что-то подобное у групп? Выясним на примере SO3.

Рассмотрим вращения трехмерного пространства:

$$\widetilde{X}: \begin{array}{l} x' = x; \\ y' = y\cos\theta - z\sin\theta; \\ z' = y\sin\theta + z\cos\theta; \end{array} \qquad \widetilde{Y}: \begin{array}{l} x' = x\cos\phi + z\sin\phi; \\ y' = y; \\ z' = -x\sin\phi + z\cos\phi; \end{array}$$

$$\widetilde{Z}: \begin{array}{l} x' = x\cos\eta - y\sin\eta; \\ y' = x\sin\eta + y\cos\eta; \\ z' = z; \end{array}$$

где символами $\widetilde{X}, \widetilde{Y}, \widetilde{Z}$ обозначены вращения вокруг соответствующих координатных осей на углы θ, ϕ, η соответственно.
Вообще любая точка на сфере задаётся 2 числами – θ и φ. Но никто не запретит нам в качестве элементов группы рассматривать какие угодно повороты – хоть вдоль 10 осей. Мы взяли вдоль 3 осей – для симметрии.

А теперь возьмём и рассмотрим случай $\theta, \varphi, \eta \to 0$:

$$\widetilde{X}: \begin{array}{l} x' = x; \\ y' = y - z\mathrm{d}\theta; \\ z' = y\mathrm{d}\theta + z; \end{array} \qquad \widetilde{Y}: \begin{array}{l} x' = x + z\mathrm{d}\phi; \\ y' = y; \\ z' = -x\mathrm{d}\phi + z; \end{array} \qquad \widetilde{Z}: \begin{array}{l} x' = x - y\mathrm{d}\eta; \\ y' = x\mathrm{d}\eta + y; \\ z' = z; \end{array}$$

Если хотите понтануться, то вот вам словечко в копилку: теоретики говорят «инфинитезимальные повороты» – по-русски «бесконечно малые повороты.

В случае малости углов у нас появляется возможность записать всё это безобразие в матричном виде:

$$\mathrm{d}T = \mathbf{1} + X\mathrm{d}\theta + Y\mathrm{d}\phi + Z\mathrm{d}\eta.$$

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad Y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad Z = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Вообще, эти матрицы можно было бы вывести из условия, что они должны сохранять длину вектора. Но пока для простоты мы прикинемся, что нам они уже известны (кам-он, это же баянные матрицы поворота).

Если мы эти матрицы заботливо пронумеруем, то сможем записать:

$$d\hat{T} = \hat{1} + \sum_{i=1}^{3} \hat{X}_i d\theta_i$$

Тем самым мы как бы разложили по базису ***бесконечно малый*** поворот. А что делать, если у нас конечный?

Сначала представим конечный поворот вдоль одной из осей:

$$\text{Поворот вдоль одной оси на } \theta = \lim_{N\to+\infty} \left(1 + \frac{\theta\hat{X}}{N}\right)^N = \exp(\theta\hat{X})$$

Матричная экспонента!

А теперь представим произвольный поворот как суперпозицию «сначала повернули вдоль одной оси, а потом вдоль второй, а потом вдоль третьей…»

$$\text{Поворот на углы } \theta_i = \prod_{i=1}^{3} \exp(\theta_i \hat{X}_i)$$

Собственно, цель достигнута – мы записали любой поворот через три матрицы. Их можно назвать базисными… но не стоит. Всё-таки у нас произведение, а сумма. Поэтому их назвали ***генераторами***.

А теперь давайте повторим это с SU(2). В отличие от SO(3), у нас нет готовых преобразований вида

$$\widetilde{X}: \begin{array}{l} x' = x; \\ y' = y - z\mathrm{d}\theta; \\ z' = y\mathrm{d}\theta + z; \end{array} \qquad \widetilde{Y}: \begin{array}{l} x' = x + z\mathrm{d}\phi; \\ y' = y; \\ z' = -x\mathrm{d}\phi + z; \end{array} \qquad \widetilde{Z}: \begin{array}{l} x' = x - y\mathrm{d}\eta; \\ y' = x\mathrm{d}\eta + y; \\ z' = z; \end{array}$$

Придётся думать самостоятельно. Какая размерность пространства H? Это пространство матриц 2x2 (ага, 4 числа), но одну степень свободы у нас забрала унитарность. Значит, 3 степени свободы – т.е. нам потребуется три базисных матрицы. Мы выберем вот такие:

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}; \quad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Матрицы Паули. И тогда мы можем записать

$$\prod_{k=1}^{3} \exp(-\frac{i\theta}{2} \hat{\sigma}_i n_i)$$

Очень похоже! Собственно, это неудивительно – группа-то одна.

А теперь давайте обсудим важные вопросы.

1) Почему произведение, а не сумма?

В самом деле, зачем мудрить? Вот есть у нас SU2, это матрицы 2x2. Почему просто не разложить в сумму 4 базисных матриц:

$$\hat{A} = a_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + a_4 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Но у нас не обычные матрицы, а унитарные! Поэтому если мы будем раскладывать в сумму, нам никто не даст унитарность.

То ли дело произведение с комплексной экспонентой – то, что надо для унитарности. Помните определение унитарности: $\hat{U}^{+}\hat{U} = \hat{I}$? Ну вот очевидно, что

$$\prod_{k=1}^{3} \exp(+\frac{i\theta}{2}\hat{\sigma}_i n_i) \prod_{k=1}^{3} \exp(-\frac{i\theta}{2}\hat{\sigma}_i n_i) = \hat{I}$$

Что нам и нужно.

2) Заметьте, что любой элемент группы получается как

поворот вокруг 1-й оси → поворот вокруг 2-й → поворот вокруг 3-й.

А кто нам сказал, что подобным образом можно представить все повороты? Вдруг некий поворот представляется как

поворот вокруг 3-й → поворот вокруг 1-й оси → поворот вокруг 2-й

или вообще как

поворот вокруг 1-й оси → поворот вокруг 3-й → поворот вокруг 1-й оси → поворот вокруг 2-й→ поворот вокруг 3-й

Так и только так?

Для SO3 из житейских соображений это может показаться очевидным… но вы уверены, что то же будет работать для какой-нибудь SU3 (подробный рассказ про которую в следующей методичке)? Нет?

Оказывается, что для того, чтобы каждый элемент группы гарантированно разлагалась в таком виде, она должна быть группой Ли.

Про группы Ли можно долго говорить. Почитаем определение в Википедии:

Группой Ли над полем K ($K = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$) называется группа G, снабжённая структурой дифференцируемого (гладкого) многообразия над K, причём отображения mul и inv, определённые так:

$$\mathrm{mul}\colon G \times G \to G;\ \ \mathrm{mul}\,(x, y) = xy,$$

$$\mathrm{inv}\colon G \to G;\ \ \ \mathrm{inv}\ x = x^{-1}$$

являются гладкими (в случае поля $\mathbb{C}$ требуют голоморфности введённых отображений).

Другими словами, группой Ли называется топологическая группа, если она является параметрической и если функция, задающая закон умножения, является вещественно-аналитичной[1].

Я вынес небольшой разговор по группы Ли в отдельную методичку ТГ3а, кому интересно – почитайте, а кому неинтересно – двигаемся к глюонам, в методичку ТГ4!